1.2. TROSTRUKI INTEGRAL

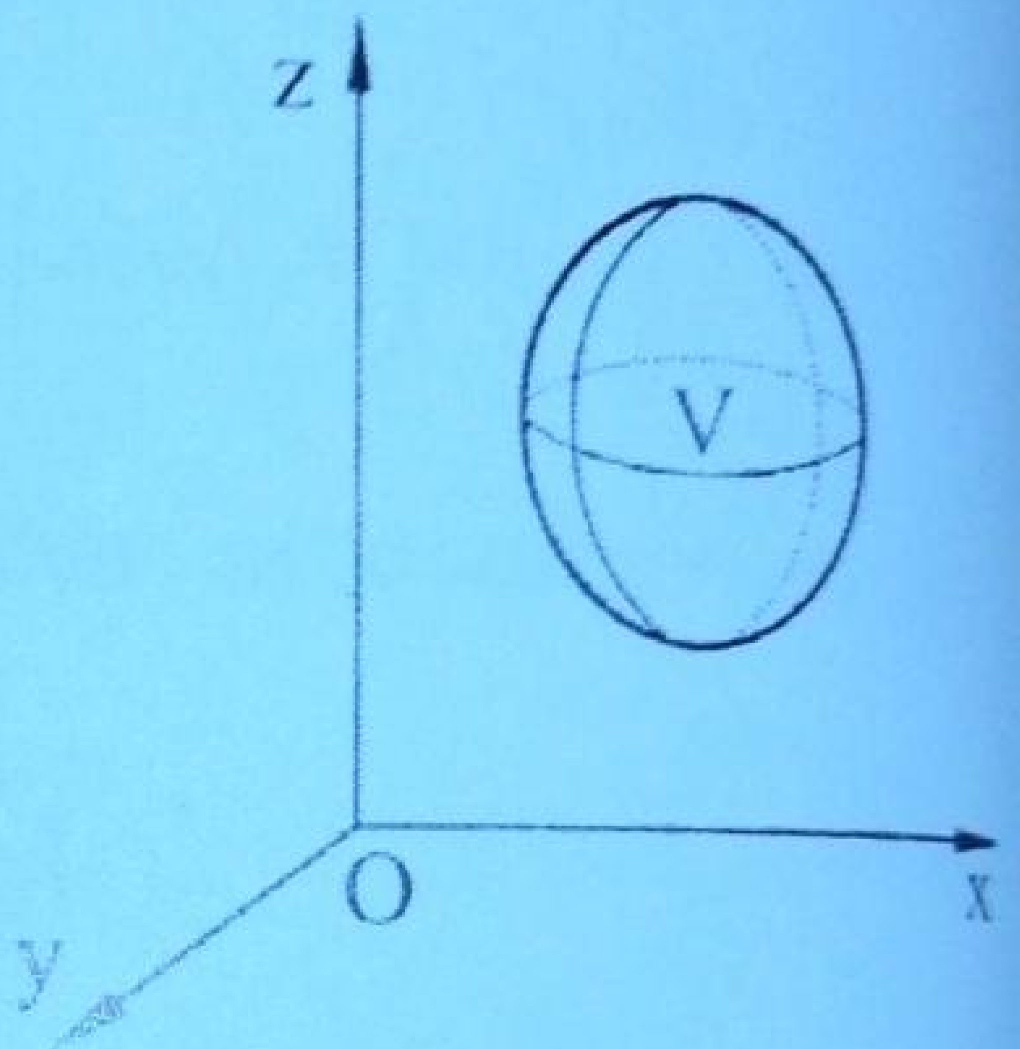
a) Definicija trostrukog integrala

Kao što je dvostruki integral bio prirodno proširenje jednostrukog integrala, tako je trostruki integral prirodno proširenje dvostrukog integrala. Definicija trostrukog integrala je slična definiciji dvostrukog integrala i gradi se za funkcije od tri promjenljive.

Neka je u zatvorenoj ograničenoj oblasti V trodimenzionalnog prostora zadata proizvoljna funkcija $f(x, y, z)$ (Sl 1). Razbijmo oblast V na n oblasti

$$\triangle V_1,\ \triangle V_2,\ \ldots,\ \triangle V_n\ .$$

Zapreminu oblasti $\triangle V_i$ označimo, ponovo, sa $\triangle V_i$. U svakoj od oblasti $\triangle V_i$ uzmimo proizvoljnu tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$ i sastavimo sumu $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle V_i$. Sumu $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle V_i$ nazivamo integralna suma za funkciju



Sl 1

$f(x, y, z)$ na oblasti V. Označimo sa λ najveći dijametar u podjeli $\triangle V_1,\ \triangle V_2,\ \ldots,\ \triangle V_n$.

Definicija 1. Ako postoji konačna granična vrijednost

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle V_i$$

koja ne zavisi od načina razbijanja oblasti V na djelove $\triangle V_i$ niti od izbora tačaka $M_i \in \triangle V_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, tada broj I nazivamo trostruki integral od funkcije $f(M)$ na oblasti V, i kratko zapisujemo

$$\iiint_V f(M)\,dV\ ,$$

ili

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz\ .$$

Ako postoji $\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz$, tada kažemo da je funkcija $f(x, y, z)$ integrabilna u oblasti V. Može se dokazati da je svaka neprekidna funkcija u oblasti V i integrabilna u V.

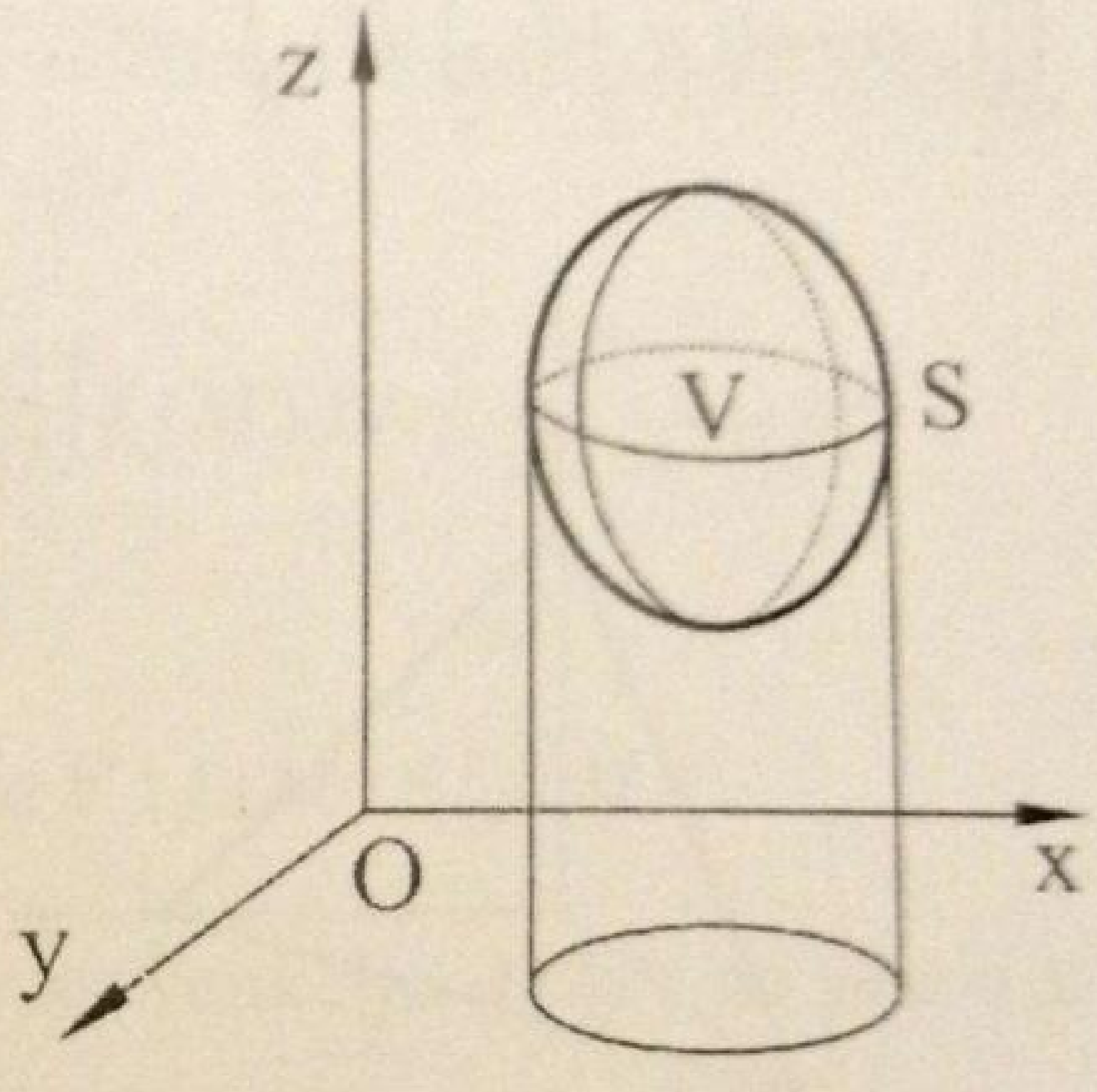
Izraz $f(x,y,z)dxdydz$ nazivamo podintegralni izraz, $f(x,y,z)$ - podintegralna funkcija, a V –oblast integracije. Nadalje smatrajmo da su sve funkcije sa kojima radimo integrabilne na odgovarajućim oblastima integracije.

b) Izračunavanje trostrukog integrala

Slično kao kod dvostrukih integrala, uvedimo pojam pravilne oblasti u pravcu ose Oz (Sl 2). To je oblast V ograničena zatvorenom površi S sa svojstvima:

1) Svaka prava koja je paralelna osi Oz i koja prolazi kroz neku unutrašnju tačku iz V prodire površ S u dvjema tačkama,

2) Projekcija tijela V (u pravcu ose Oz) na ravan Oxy je oblast pravilna u pravcu ose Oy.



Sl 2

Slično se definiše i oblast V pravilna u pravcu ose Ox, odnosno ose Oy. Neka je oblast V zadata na sljedeći način:

$$V:\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y) \end{cases},$$

gdje su φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 neprekidne funkcije, prve dvije na odsječku $[a,b]$, a druge dvije na oblasti D –projekcija oblasti V na ravan Oxy. Može se dokazati da je

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx .$$

Integral na desnoj strani zadnje formule zapisujemo u obliku

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz ,$$

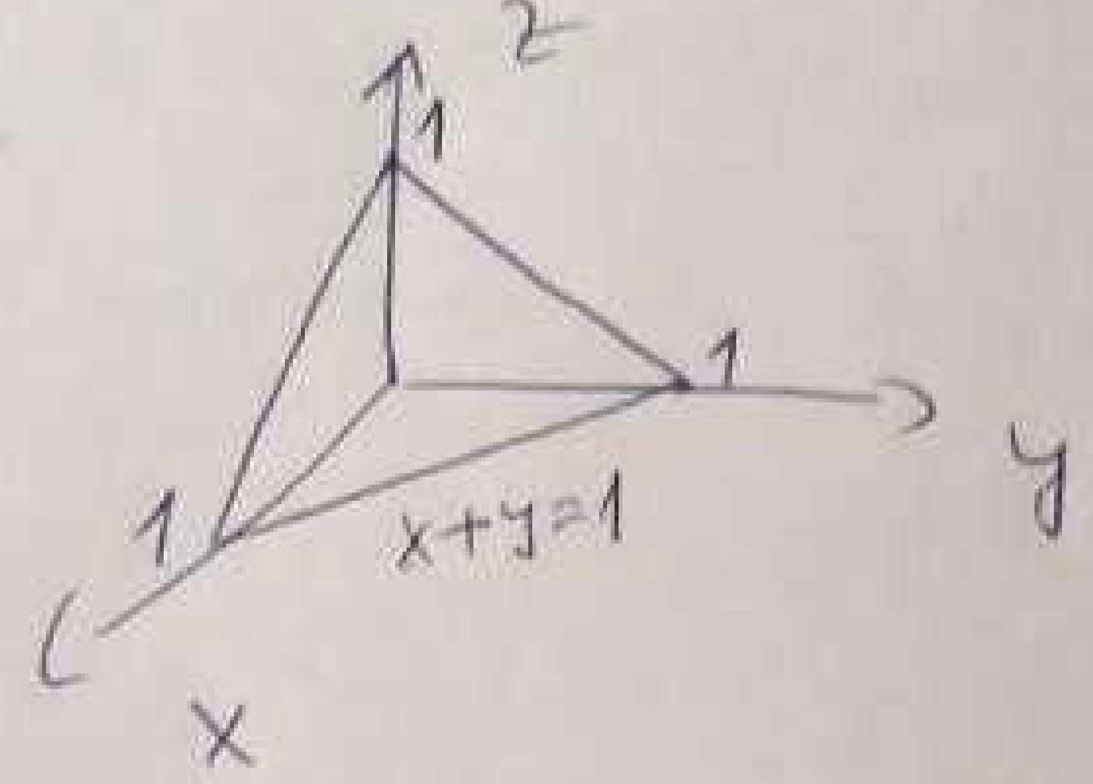
tj.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz . \qquad (1)$$

Pomoću formule (1) izračunavaju se trostruki integrali. Uočimo da se izračunavanje trostrukog integrala svelo na uzastopno izračunavanje tri jednostruka integrala.

Primjer 1: Izračunati $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$ gdje je V oblast ograničena ravnima $x=0,\ y=0,\ z=0$ i $x+y+z=1$.

R|



$$V:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}$$

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} 1-x=t,\ dx=-dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array} \end{array}\right] = -\frac{1}{6}\int_1^0 t^3\,dt = \frac{1}{24}$$

$$\int_0^{1-x-y} z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} = \frac{1}{2}(1-x-y)^2$$

$$\int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy = \left[\begin{array}{c} 1-x-y=t \\ dy=-dt \\ \begin{array}{c|c|c} y & 0 & 1-x \\ \hline t & 1-x & 0 \end{array} \end{array}\right] = -\int_{1-x}^0 t^2\,dt =$$

$$= \int_0^{1-x} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{1-x} = \frac{1}{3}(1-x)^3$$

-Smjena promjenljivih u trostrukom integralu-

Neka se zatvorena ograničena oblast V obostrano-jednoznačno preslikava u oblast V' pomoću neprekidno diferencijabilnih funkcija:

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w),$$

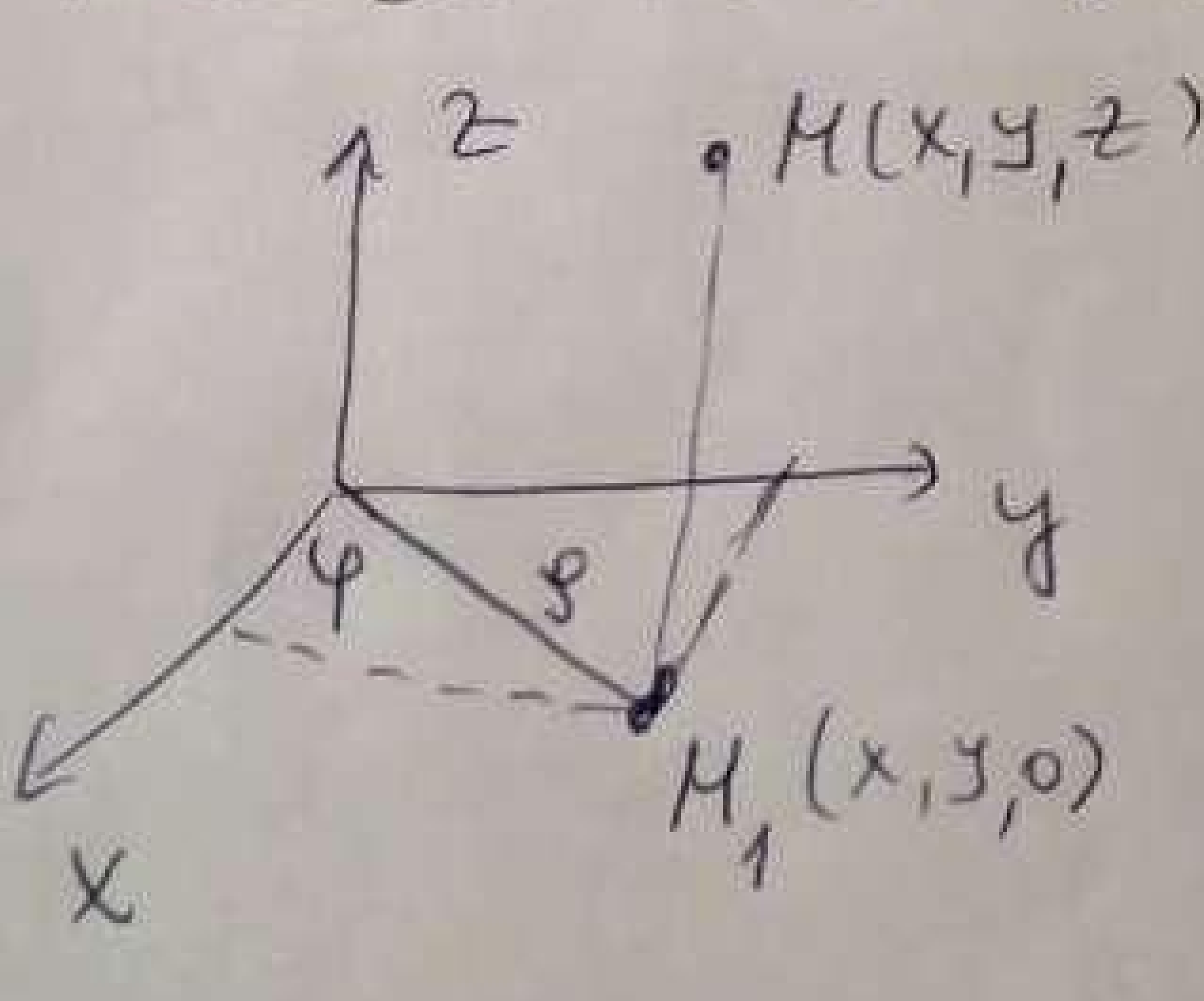
pri čemu je Jakobijan
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

u tačkama $(u,v,w) \in V'$. Može se dokazati da važi:

$$\cancel{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]\,|J|\,du\,dv\,dw$$

Navešćemo dva specijalna slučaja.

1) 

Dekartove koordinate (x,y,z) i cilindrične koordinate (ρ,φ,z) povezane su formulama:

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

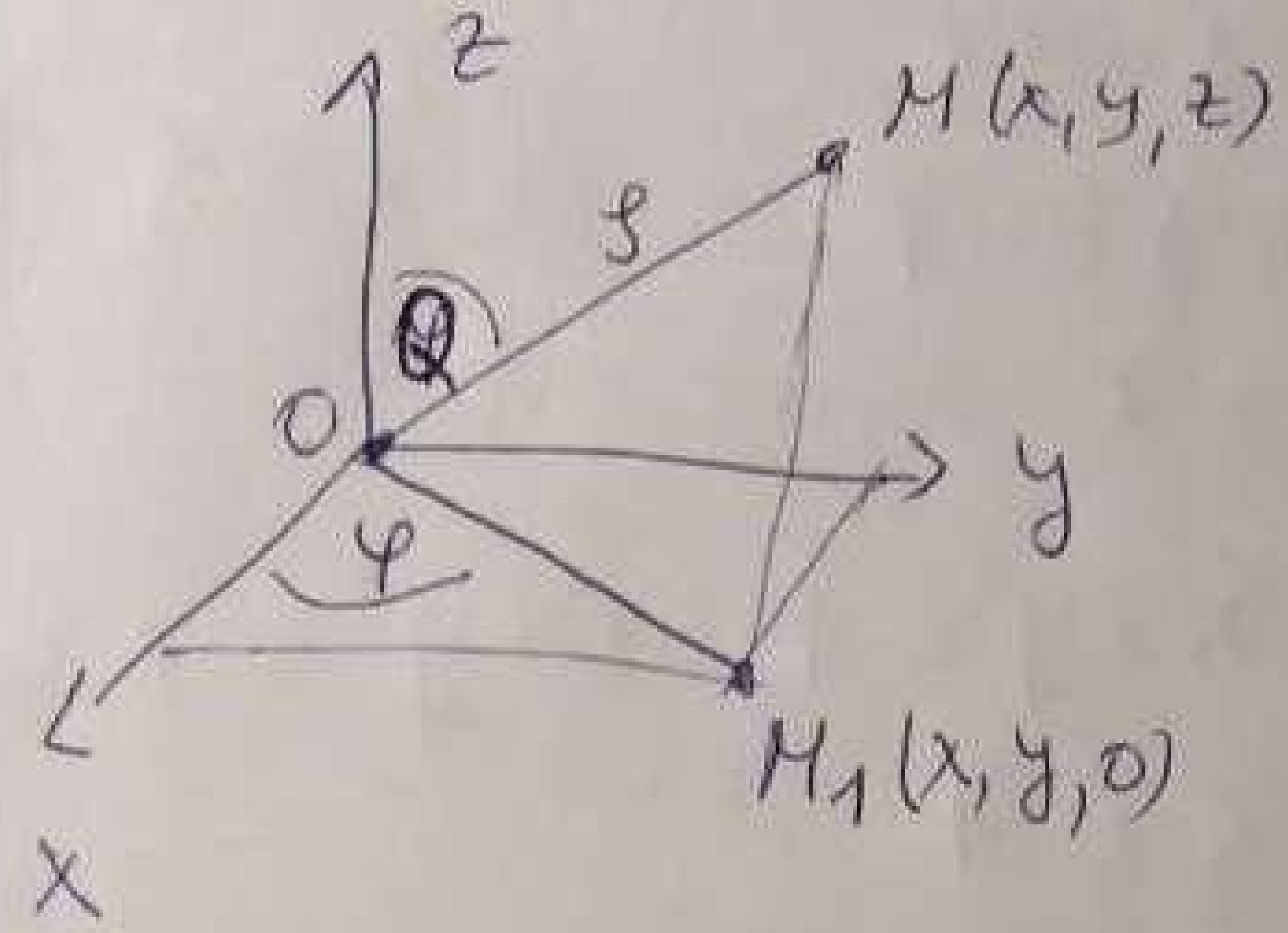
$z = z \qquad (0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$

U ovom slučaju $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$

pa važi:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

2)



Dekartove koordinate (x,y,z) i sferne koordinate (ρ, φ, Q) povezane su formulama:

$$x = \rho\cos\varphi\sin Q, \quad y = \rho\sin\varphi\sin Q, \quad z = \rho\cos Q$$

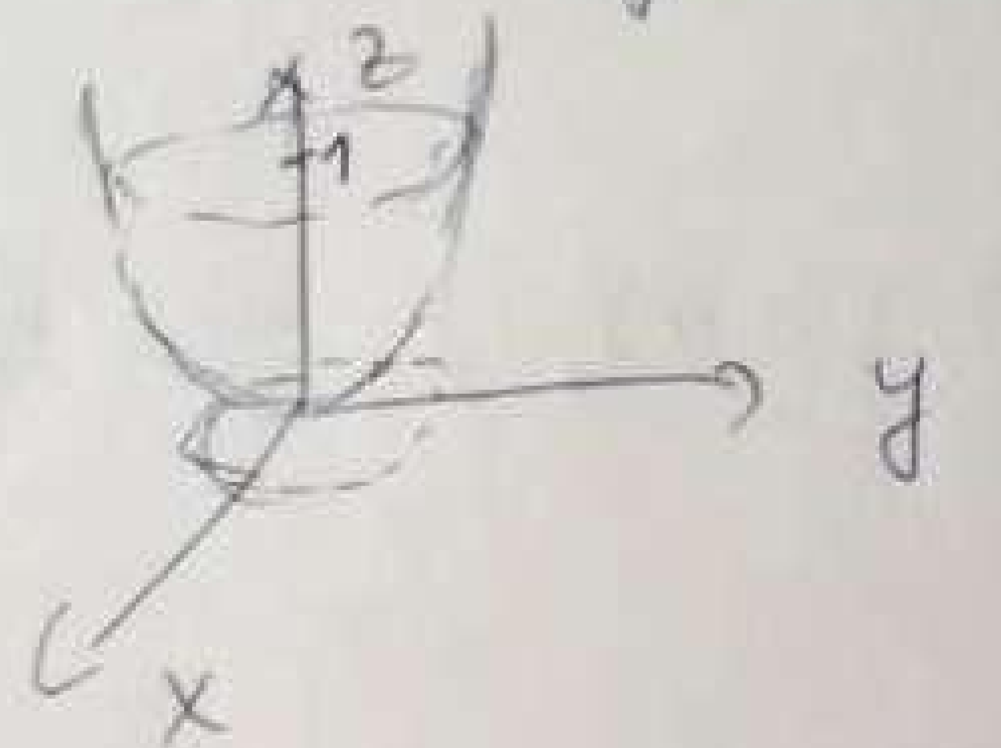
$$(0 \le \rho < +\infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le Q \le \pi)$$

Tada je $|J| = \rho^2 \sin Q$ pa važi:

$$\cancel{\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi\sin Q, \rho\sin\varphi\sin Q, \rho\cos Q)\rho^2\sin Q\,d\rho\,d\varphi\,dQ}$$

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi\sin Q, \rho\sin\varphi\sin Q, \rho\cos Q)\,\rho^2\sin Q\,d\rho\,d\varphi\,dQ$$

Primjer 2: Izračunati $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena površima $z=x^2+y^2$, $z=1$.



Uvedimo cilindrične koordinate:

$$x=\rho\cos\varphi \qquad (J=\rho)$$
$$y=\rho\sin\varphi$$
$$z=z.$$

Tada je $V=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2\le z\le 1\}$

pa je V': $\begin{cases} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ \rho^2\le z\le 1. \end{cases}$

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} (\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

$$=\iiint\limits_{V'} \rho^3\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{\rho^2}^1 \rho^3\,dz=$$

$$=\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}(\rho^3-\rho^5)\,d\varphi=2\pi\int_0^1(\rho^3-\rho^5)\,d\rho=2\pi\cdot\frac{1}{12}=\frac{\pi}{6}.$$

$$\int_{\rho^2}^1 \rho^3\,dz=\rho^3\cdot\left(z\Big|_{\rho^2}^1\right)=\rho^3(1-\rho^2)=\rho^3-\rho^5$$

$$\int_0^{2\pi}(\rho^3-\rho^5)\,d\varphi=(\rho^3-\rho^5)\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)=2\pi(\rho^3-\rho^5)$$

Primjer: Nađi ...

- Primjene trostrukog integrala -

1) Ako je u definiciji trostrukog integrala $f(M) \equiv 1$, $M \in (V)$ tada $\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz$ predstavlja zapreminu tijela (V).

2) Masa tijela (V) čija je gustina materije u svakoj tački (x,y,z) neprekidna funkcija $\gamma(x,y,z)$ izračunava se po formuli:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

3) Neka je gustina materije tijela (V) neprekidna funkcija $\gamma(x,y,z)$. Tada se statički momenti M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} u odnosu na koordinatne ravni Oxy, Oxz i Oyz izračunavaju po formulama:

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Koordinate težišta tijela su:

$$x_T = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} x\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad y_T = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} y\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$z_T = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} z\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Specijalno, ako je tijelo homogeno tj. gustina materije konstantna, tada je:

$$x_T = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz,\quad y_T = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} y\,dx\,dy\,dz,$$

$$z_T = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz.$$

Ovdje je V je zapremina tijela (V).

4) Momenti inercije tijela (V), čija je gustina materije $\gamma(x,y,z)$ neprekidna funkcija, u odnosu na koordinatne ose izračunavaju se po formulama:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2+z^2)\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2+z^2)\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Moment inercije u odnosu na koordinatni početak izračunava se po formuli:

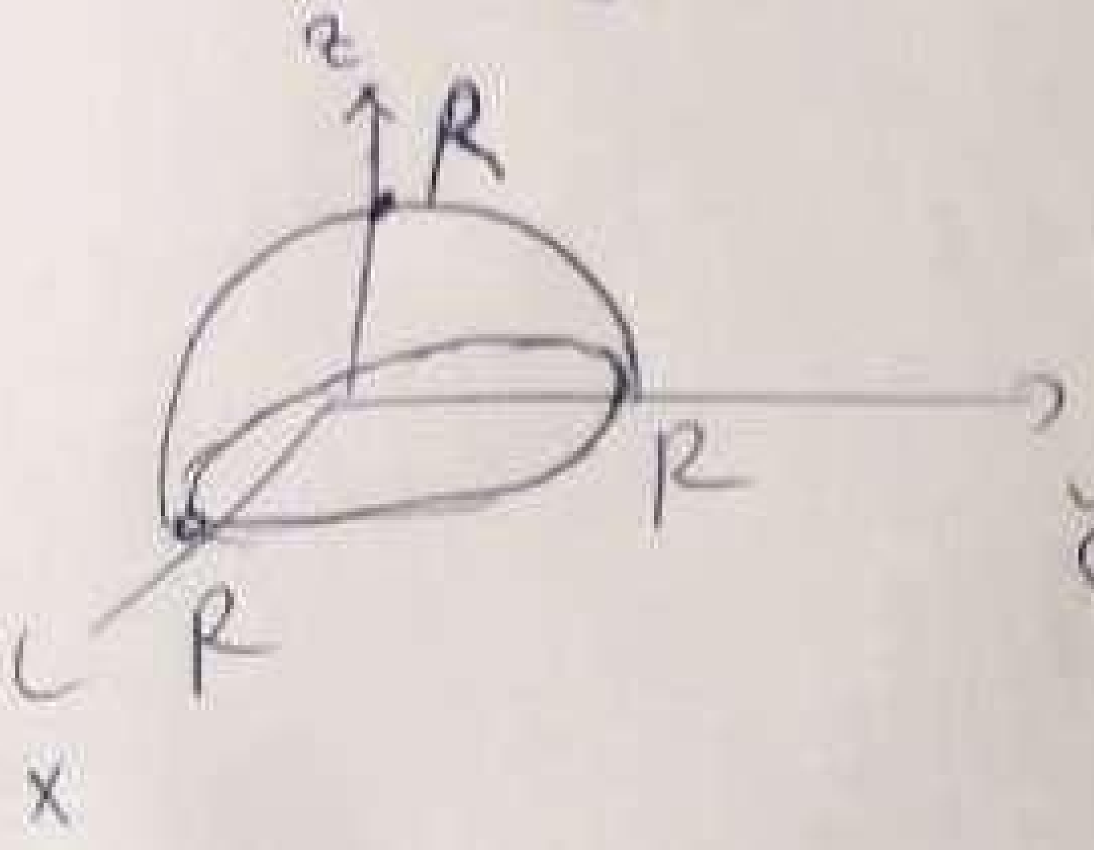
$$I_0 = \iiint\limits_{V} (x^2+y^2+z^2)\,\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Primjer 3: Naći masu tijela (V) koje je ograničeno gornjom poluloptom $x^2+y^2+z^2=R^2$ i ravni $z=0$, ako je gustina materije u svakoj tački (x,y,z) jednaka x^2+y^2.

Rj: $m = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

Uvedimo sferne koordinate:

$$x = \rho\cos\varphi\sin Q$$
$$y = \rho\sin\varphi\sin Q \qquad J = \rho^2\sin Q$$
$$z = \rho\cos Q$$



$$V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$$

$$V': \begin{cases} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le Q \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} (\rho^2\cos^2\varphi\sin^2 Q + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2 Q)\,\rho^2\sin Q\,d\rho\,d\varphi\,dQ$$

$$= \iiint\limits_{V'} \rho^2\sin^2 Q\cdot\rho^2\sin Q\,d\rho\,d\varphi\,dQ = \iiint\limits_{V'} \rho^4\sin^3 Q\,d\rho\,d\varphi\,dQ =$$

$$= \int_0^R d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4\sin^3 Q\,dQ = \frac{2}{3}\cdot 2\pi\int_0^R \rho^4\,d\rho = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^R = \frac{4\pi R^5}{15}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 Q\,dQ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 Q)\sin Q\,dQ = \left| \begin{matrix} \cos Q = t \\ \sin Q\,dQ = -dt \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c|c} Q & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\int_1^0 (1-t^2)\,dt = \int_0^1 (1-t^2)\,dt = t - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$